

Mécanique des Fluides

Franck Nicoud

Polytech Montpellier // IMAG - UMR CNRS 5149

<http://imag.umontpellier.fr/~nicoud/>

franck.nicoud@umontpellier.fr

Plan général

1. Rappels
2. Quelques solutions analytiques
3. Notion de turbulence
4. Interaction fluide-structure

Objectifs

1. On s'intéresse dans cette partie du cours à quelques situations particulières pour lesquelles il est possible de déterminer une solution analytique aux équations de la mécanique des fluides
2. Cela n'est évidemment pas possible dans le cas général pour lequel l'analyse mathématique permet tout au plus de s'assurer qu'une solution existe, voire qu'elle est unique. On a alors recours à la **Mécanique des Fluides Numérique** (**Computational Fluid Dynamics** - CFD)
3. Cet exercice a un double objectif:
 1. Acquérir un sens physique des écoulements fluides,
 2. Se doter d'une batterie de situations pour lesquelles on peut tester les logiciels de CFD

Simplifications

1. Des solutions analytiques ne peuvent être obtenues que lorsque:
 1. la géométrie
 2. et/ou les conditions aux limites,
 3. et/ou l'évolution temporelle de l'écoulement,
 4. et/ou a loi d'état du fluide
 5. et/ou la loi rhéologique du fluidesont simples
2. La tâche est également grandement simplifiée lorsque les forces de viscosité sont soit négligeables, soit prépondérantes. Cette propriété est quantifiée par la valeur du nombre de Reynolds

Equations en coordonnées cartésiennes – Fluide incompressible

- Masse:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

- Quantité de mouvement:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] + F_x$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right] + F_y$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + F_z$$

- Equation d'état: $\rho = \rho_0$

Equations en coordonnées cylindriques – Fluide incompressible

- Masse:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

- Quantité de mouvement:

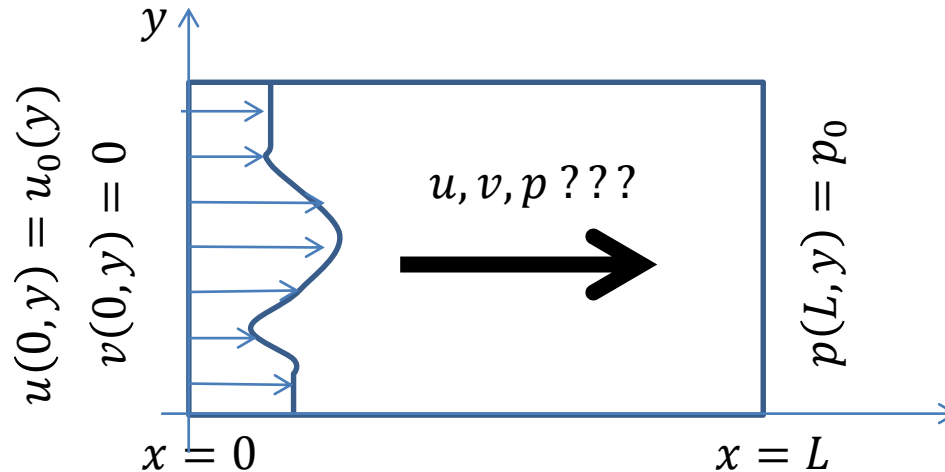
$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right] \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = \\ - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \end{aligned}$$

- Equation d'état: $\rho = \rho_0$

Exemples de solutions en écoulement non-visqueux

Écoulement cisailé

1. L'absence de viscosité rend triviale la solution à toute situation du type suivant:

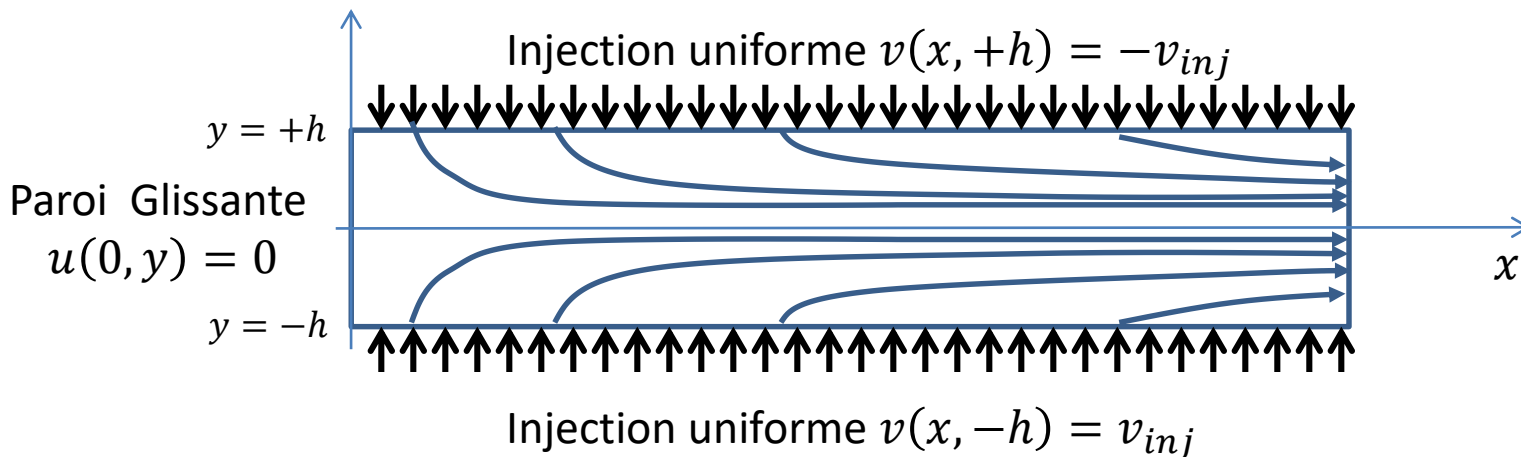


Solution: $u(x,y) = u_0(y)$; $v(x,y) = 0$; $p(x,y) = p_0$

2. Cette situation, simple analytiquement, est souvent redoutable pour les codes de calcul qui introduisent de la viscosité de manière artificielle ...
3. Valable même en fluide compressible à Mach élevé

Injection pariétale

1. On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible non-visqueux



Injection pariétale

1. On montre alors que la solution s'écrit sous la forme:

$$u(x, y) = u_{axe}(x) \cos\left(\frac{\pi y}{2h}\right) \quad \text{avec} \quad u_{axe}(x) = \frac{\pi v_{inj}}{2h} x$$

$$v(x, y) = -v_{inj} \sin\left(\frac{\pi y}{2h}\right)$$

$$p(x, y) = \frac{\rho v_{inj}^2}{4} \left(\cos\left(\frac{\pi y}{h}\right) - \frac{\pi^2}{2h^2} x^2 \right)$$

2. Il s'agit d'une des rares solutions 2D-2C des équations d'Euler. C'est par ailleurs une très bonne approximation de la solution des équations de Navier-Stokes
3. Extension possible en 2D axisymétrique

Tourbillon

1. Ecrites en coordonnées cylindriques les équations d'Euler dégènèrent ainsi pour une situation 2D stationnaire où la vitesse radiale est nulle :

$$-\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

2. On en déduit une famille paramétrées par ω [rad/s] et a [m] de solutions (tourbillon de Rankine):

$$u_r(r, \theta) = 0$$

$$u_\theta(r \leq a, \theta) = \omega r \qquad u_\theta(r \geq a, \theta) = \frac{\omega a^2}{r}$$

$$p(r \leq a, \theta) = p_\infty + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho \omega^2 a^2$$

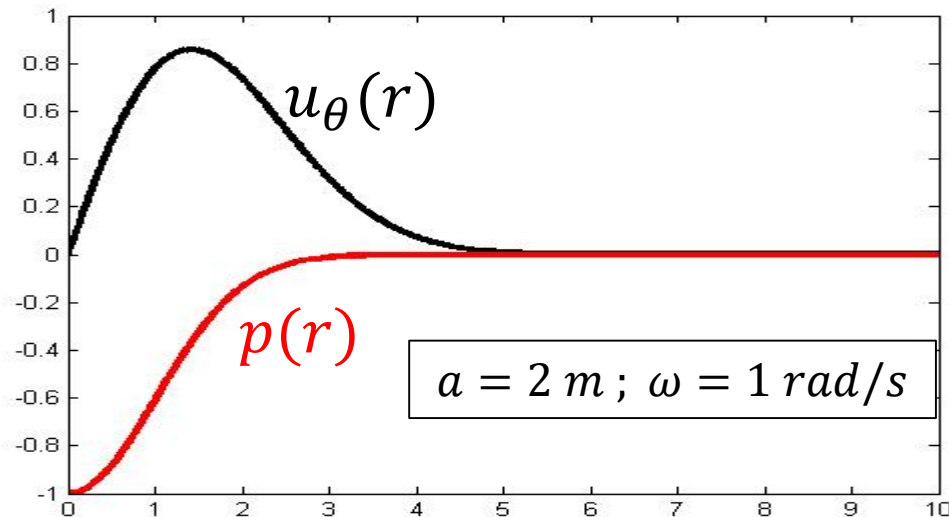
$$p(r \geq a, \theta) = p_\infty - \frac{\rho \omega^2 a^4}{2r^2}$$

Tourbillon de Taylor

1. Une solution analytique infiniment continue et rapidement décroissante existe sous la forme suivante:

$$u_r(r, \theta) = 0 \quad u_\theta(r, \theta) = \omega r \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$p(r, \theta) = p_\infty - \frac{\rho \omega^2 a^2}{4} \exp^2\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$$



Sous l'hypothèse $\omega r \ll u_0$, cette solution analytique permet de tester la capacité d'un code de calcul à convecter un tourbillon à la vitesse u_0

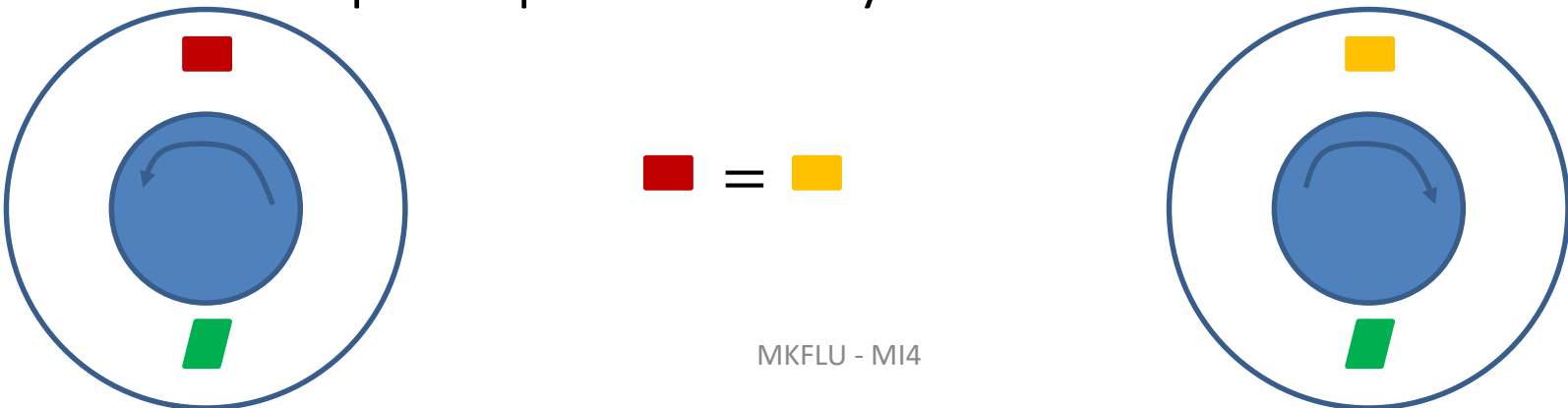
Exemples de solutions en écoulement rampant

Modèle de Stokes

1. Lorsque le nombre de Reynolds est très petit devant l'unité et que le fluide est incompressible, les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations de Stokes:

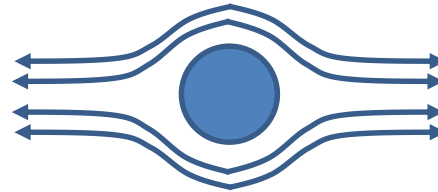
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

2. Le modèle de Stokes est considérablement plus simple que celui de Navier-Stokes car il est linéaire
3. La linéarité induit la propriété de réversibilité cinématique, illustrée par l'expérience de Taylor



Modèle de Stokes

1. L'absence de termes inertiels a également pour conséquence la symétrie des solutions qui apparaissent alors contre-intuitives (car notre intuition intègre la présence d'inertie ...)



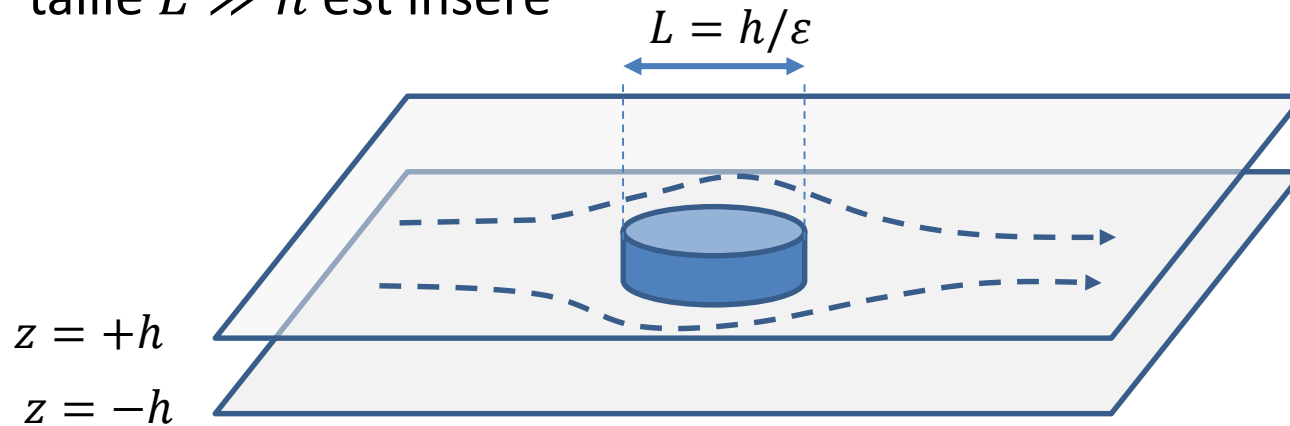
2. Sous l'hypothèse de stationnarité $\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0\right)$, l'analyse mathématique permet alors de montrer que:

- Pour un jeu de conditions limites donné, la solution existe et est unique,
- La solution minimise la dissipation globale $D =$

$$2\mu \iiint_V S_{ij} S_{ij} dv$$

Écoulement de Hele-Shaw

1. On considère un écoulement de Stokes entre deux plaques parallèles distantes de $2h$ et entre lesquelles un obstacle de taille $L \gg h$ est inséré

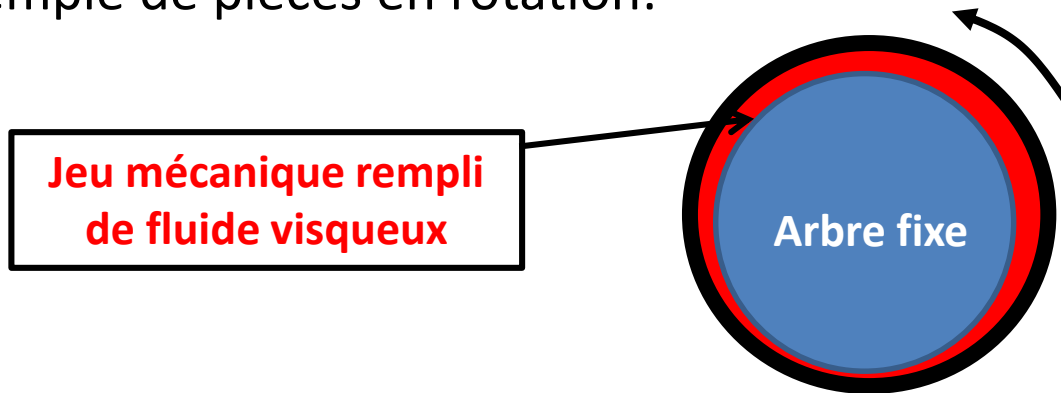


2. En ne conservant que les termes prépondérants en ε^{-2} , on montre que dans le plan de symétrie $z = 0$, la solution vérifie
$$\operatorname{div}(\mathbf{u}_0) = 0 \quad ; \quad \mathbf{u}_0 = -\frac{h^2}{2\mu} \nabla p_0$$
3. La pression est donc solution de l'équation de Laplace $\Delta p_0 = 0$ et le champ de vitesse est irrotationnel, quelque soit la forme de l'obstacle

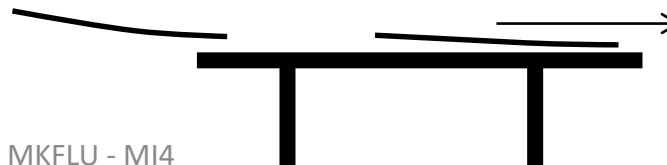
Patin hydraulique

1. Les systèmes mécaniques mettant en jeu des pièces en mouvement relatif sont lubrifiés pour limiter les frottements et l'échauffement résultant

2. Exemple de pièces en rotation:

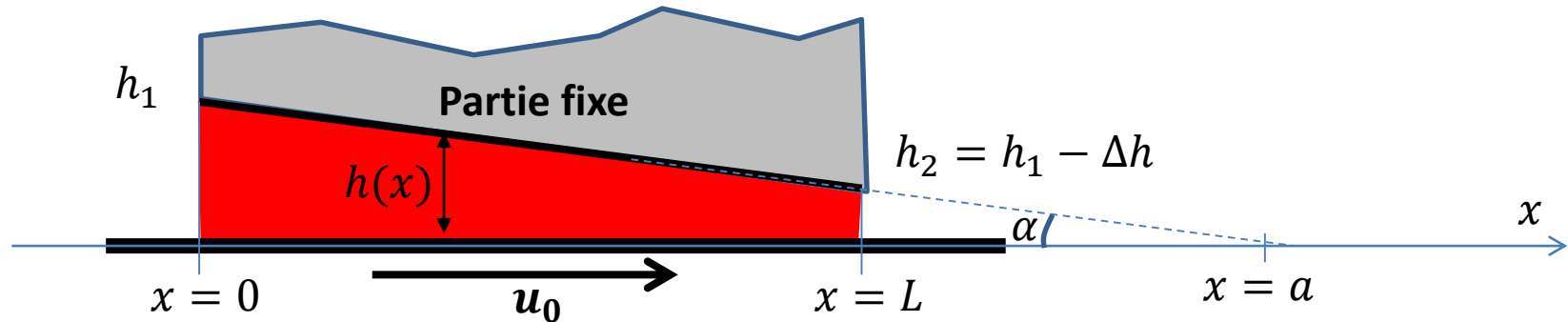


3. Expérience pour pas cher: le lancer de feuille ...



Modélisation 2D du film visqueux

1. On considère la situation suivante comme représentative du phénomène observé:



2. On suppose que

1. $Re = \frac{u_0 h}{\nu} \ll 1$ et $\varepsilon = \frac{h}{L} \ll 1$

2. le film est soumis à la même pression p_0 en $x = 0$ et $x = L$

3. En conservant que les termes prépondérants dans les équations de Stokes, on montre alors que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Modélisation 2D du film visqueux

1. Avec les conditions limites en vitesse indiquées précédemment, on obtient alors la solution

$$u(x, y) = \left(1 - \frac{y}{h}\right) u_0 - \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx}$$

2. En utilisant le fait que le débit volumique

$$Q(x) = \int_0^{h(x)} u(x, y) dy$$

ne dépend pas de x on obtient une expression de la pression qui après application des conditions aux limites devient:

$$p(x) = p_0 - 6\mu \frac{u_0}{\alpha^2(2a - L)} \frac{x(x - L)}{(a - x)^2}$$

Forces résultantes

3. La pression est donc en tout point supérieure à p_0 .

4. Il en résulte une force de portance:

$$F_y = \int_0^L (p - p_0) dx = -\frac{6\mu u_0}{\alpha^2} \left(\ln \frac{a-L}{a} + \frac{2L}{2a-L} \right)$$

5. La trainée est par ailleurs:

$$F_x = \int_0^L \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx = \frac{-2\mu u_0}{\alpha} \left(\ln \frac{a}{a-L} + \frac{3L}{2a-L} \right)$$

Comportement à la limite

1. Dans la limite $\alpha \rightarrow 0$, on a $h_1 = \alpha a$. Pour une longueur de film L et une hauteur h_1 fixées, le rapport L/a vérifie $L/a \rightarrow 0$

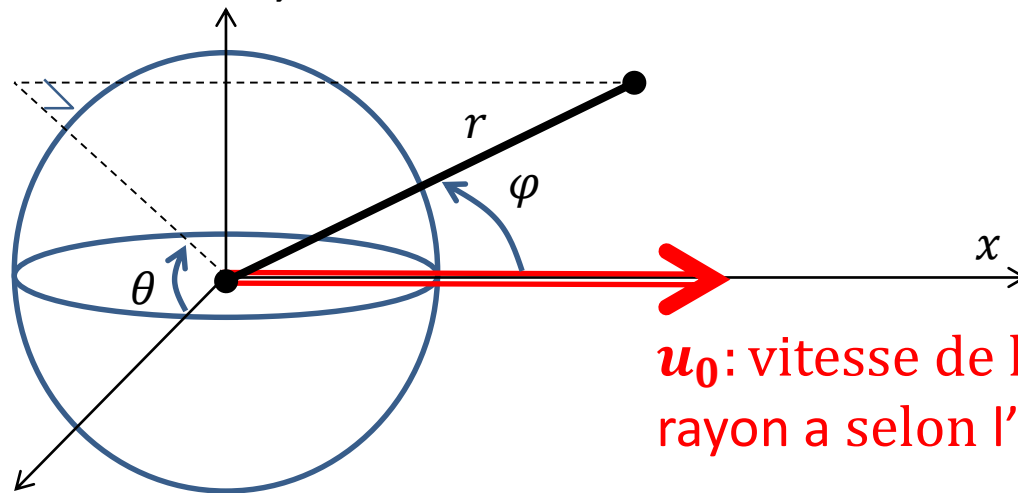
2. On vérifie alors que $\ln \frac{a-L}{a} + \frac{2L}{2a-L} \rightarrow -\frac{1}{12} \left(\frac{L}{a}\right)^3$ et que la force de portance se comporte comme:

$$F_y = \frac{3\mu u_0 L^2}{h_1^2} \quad \text{lorsque } \alpha \rightarrow 0$$

3. **La portance est alors proportionnelle à la viscosité, à la vitesse relative u_0 et inversement proportionnelle au carré de l'épaisseur du film**

Sphère isolée

1. On considère le cas d'une sphère de rayon a en mouvement à la vitesse u_0 dans un fluide au repos
2. On suppose que $R_e = \frac{2u_0 a}{\nu}$ est petit devant l'unité



u_0 : vitesse de la sphère de rayon a selon l'axe Ox

3. En formulant les équations de Stokes en coordonnées sphériques et en utilisant la symétrie de la configuration dans la direction θ , il est possible de résoudre ce problème analytiquement

Sphère isolée

1. On obtient pour les champs de vitesse et de pression:

$$u_r = u_0 \left(\frac{3a}{2r} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) \cos\varphi \quad u_\varphi = -u_0 \left(\frac{3a}{4r} + \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right) \sin\varphi$$

$$p = p_0 + \frac{3}{2} \mu a u_0 \frac{\cos\varphi}{r^2}$$

2. Cette solution n'est pas irrotationnelle, la composante dans la direction θ de $\text{rot } \mathbf{u}$ étant $\Omega_\theta = \frac{3}{2} a u_0 \frac{\sin\varphi}{r^2}$
3. On remarque que la pression n'est pas symétrique amont/aval; l'écoulement crée donc une trainée de pression obtenue en intégrant la pression sur la surface de la sphère
4. Avec $dS = a^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$ et $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_x = \cos\varphi$, on obtient $F_x^{\text{Pressure}} = -2\pi\mu u_0 a$

Sphère isolée

1. Il existe également une trainée de frottement liée à la seule contrainte pariétale non nulle $\tau_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right)$.

2. Avec $dS = a^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$ et $\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_x = -\sin\varphi$, on obtient :
 $F_x^{Viscosité} = -4\pi\mu u_0 a$

3. Au final, la trainée totale subie par la sphère est égale à :

$$F_x = -6\pi\mu u_0$$

4. Après adimensionnement on obtient le coefficient de trainée de la sphère à bas Reynolds:

$$C_x = \frac{|F_x|}{\frac{1}{2}\rho S u_0^2} = \frac{24}{Re} \text{ avec } S = \pi a^2$$

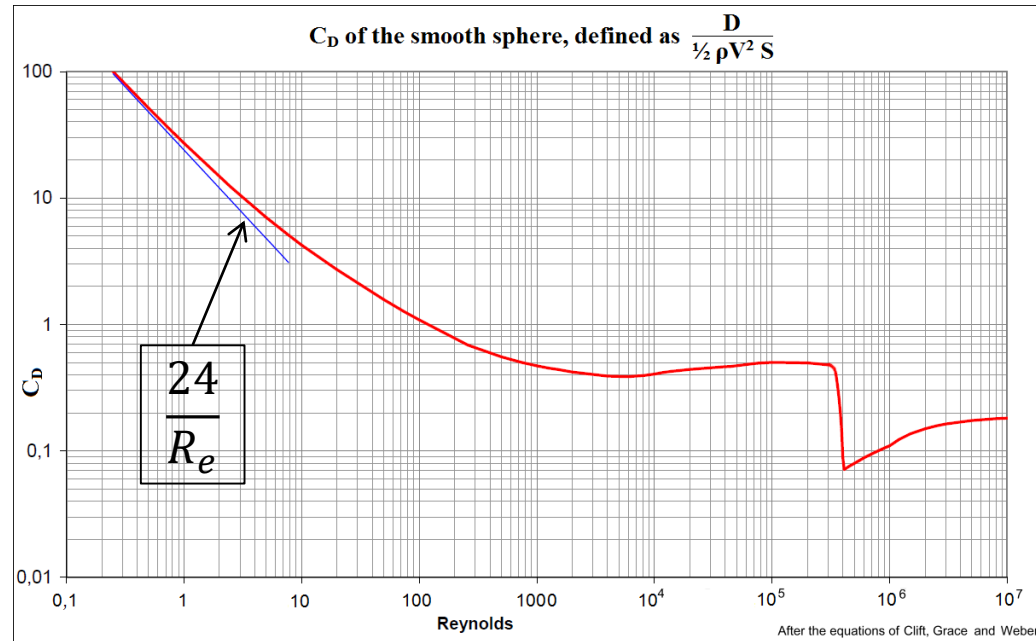
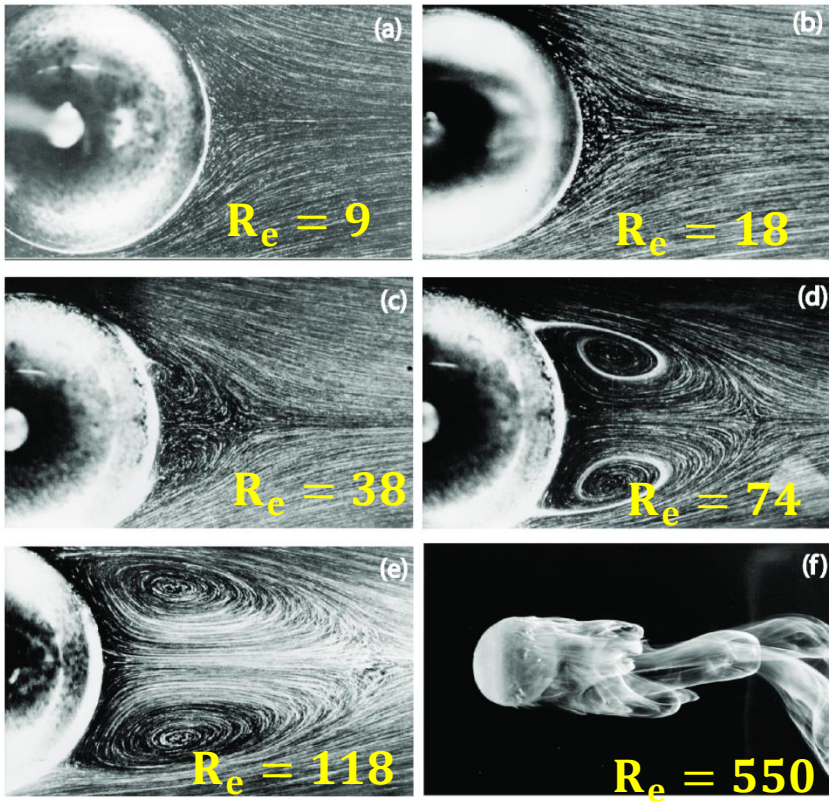
Ce résultat est connu sous le nom de formule de Stokes (encore une).

Paradoxe de Stokes

1. En 2D, il n'existe pas de solution des équations de Stokes vérifiant simultanément les conditions aux limites sur le cylindre (infiniment long) et à l'infini. C'est le paradoxe de Stokes.
2. Cela tient au fait que les termes d'inertie finissent toujours par ne plus être négligeables devant les termes de diffusion lorsque l'on s'éloigne suffisamment du cylindre
3. Le paradoxe se lève en résolvant les équations de Oseen (au lieu de Stokes) qui conduisent par exemple à $C_x = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{8} Re \right)$ dans le cas de la sphère

Attention à la limite de validité !

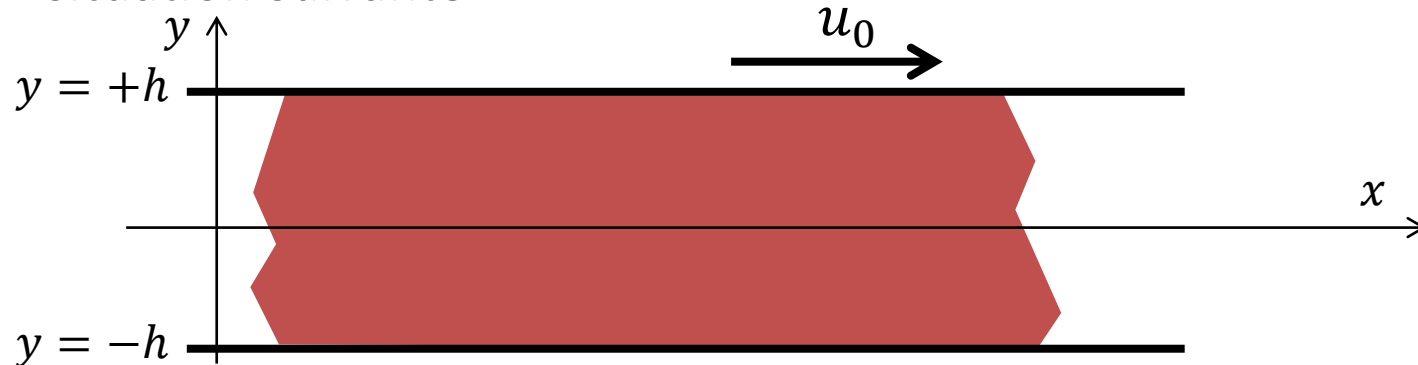
1. Les effets de nombre de Reynolds fini se font sentir très rapidement. Pour le cas de la sphère par exemple, la formule de Stokes cesse d'être valable dès $R_e \sim 1$



Exemples de solutions à nombre de Reynolds modéré

Écoulement de Couette plan

1. On considère un fluide visqueux incompressible dans la situation suivante



2. On montre alors que si les plaques sont « infiniment longues », la solution est simplement

$$u(x, y) = \frac{u_0}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right)$$

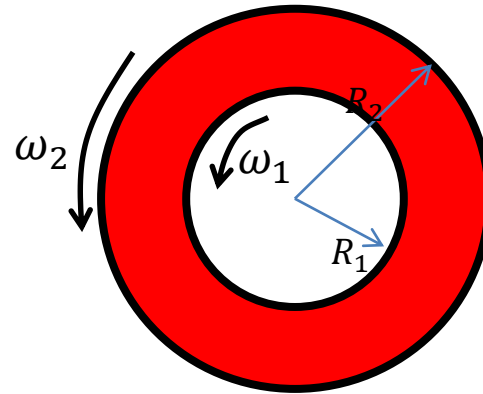
$$v(x, y) = 0$$

$$p(x, y) = p_0$$

3. Cet écoulement est le plus simple des écoulements cisailés mais il est difficilement réalisable technologiquement

Ecoulement de Couette cylindrique

1. Il s'agit de la version axisymétrique de l'écoulement de Couette plan; le fluide visqueux est contenu entre deux cylindres concentriques de rayon R_1 et R_2 et de vitesse angulaire ω_1 et ω_2



2. La solution est alors donnée par:

$$u_{\theta}(r) = Ar + \frac{B}{r} \quad p(r) = p_0 + \rho \left(\frac{A^2}{2} r^2 + 2AB \ln r - \frac{B^2}{2r^2} \right)$$

$$A = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad B = -(\omega_2 - \omega_1) \frac{R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

3. La connaissance de cette solution analytique justifie l'emploi de cette configuration pour la construction de viscosimètres (dits viscosimètres rotatifs)

Écoulement de Poiseuille plan

1. On considère un fluide visqueux incompressible dans la situation suivante



2. On montre alors que si les plaques sont « infiniment longues », la solution analytique vérifie

$$u(x, y) = u_{axe} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad u_{axe} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h^2 = \frac{3}{2} u_{moy}$$

$$v(x, y) = 0 \quad p = p_0 + \frac{dp}{dx} x$$

3. Le coefficient de perte de charge est alors: $\Lambda =$

$$-2h \frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{1}{2}\rho u_{moy}^2} = \frac{24}{Re} \quad \text{avec} \quad Re = \frac{\rho u_{moy} 2h}{\mu}$$

Écoulement de Poiseuille cylindrique

1. On considère un fluide visqueux incompressible dans la situation suivante



2. On montre alors que si la conduite est « infiniment longue », la solution analytique vérifie

$$u(x, r) = u_{axe} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad u_{axe} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 = 2 u_{moy}$$

$$v(x, y) = 0 \quad p = p_0 + \frac{dp}{dx} x$$

3. Le coefficient de perte de charge est alors: $\Lambda =$

$$-2R \frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{1}{2} \rho u_{moy}^2} = \frac{64}{Re} \quad \text{avec} \quad Re = \frac{\rho u_{moy} 2R}{\mu}$$

MKFLU - MI4

Théorème de Bernoulli et écoulement de Poiseuille

1. La solution de Poiseuille indique que la pression baisse au rythme $\frac{dp}{dx} = -8\mu u_{moy}/R^2$
2. C'est en contradiction avec la forme faible du théorème de Bernoulli qui conduit à $\frac{dp}{dx} = 0$ pour une conduite horizontale de section constante
3. Il faut utiliser ici la forme **augmentée** du théorème de Bernoulli $\mathcal{H}_s - \mathcal{H}_e = -\frac{\psi}{\phi}$, où ϕ est le débit volumique et $\psi = \iiint \tau_{ij} S_{ij} dv$ est la puissance dissipée par effet visqueux
4. Avec $u(x, r) = 2u_{moy} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, c'est-à-dire $\frac{du}{dr} = -4u_{moy}r/R^2$, et $\tau_{ij} S_{ij} = \mu \left(\frac{du}{dr}\right)^2$, on obtient bien une chute de pression de $8\mu u_{moy}L/R^2$ pour une conduite de longueur L

Problème de Stokes

1. On considère un fluide visqueux incompressible initialement au repos au dessus d'une plaque infinie dont la vitesse tangentielle passe brusquement de 0 à la valeur u_0 en $t = 0$



2. Cherchant la solution de ce problème instationnaire sous la forme $u(y, t) = u_0 f(\eta)$ avec $\eta = \frac{y}{g(t)}$, on obtient:

$$g(t) = 2\sqrt{\nu t}$$
$$u(y, t) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\alpha^2} d\alpha \right)$$

Problème de Stokes

1. Le mouvement de la plaque est transmis au fluide par diffusion sur une distance qui dépend du temps; notant δ cette distance d'influence de la plaque, on peut par exemple la définir par $u(\delta, t) = 0.01 u_0$, soit:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta/2\sqrt{\nu t}} e^{-\alpha^2} d\alpha = 0.99, \quad \text{ou encore} \quad \delta \approx 3.63\sqrt{\nu t}$$

2. La distance sur laquelle la diffusion propage l'information augmente donc comme la racine carrée du temps. Par suite, le nombre de Reynolds caractéristique de cet écoulement est une fonction croissante du temps

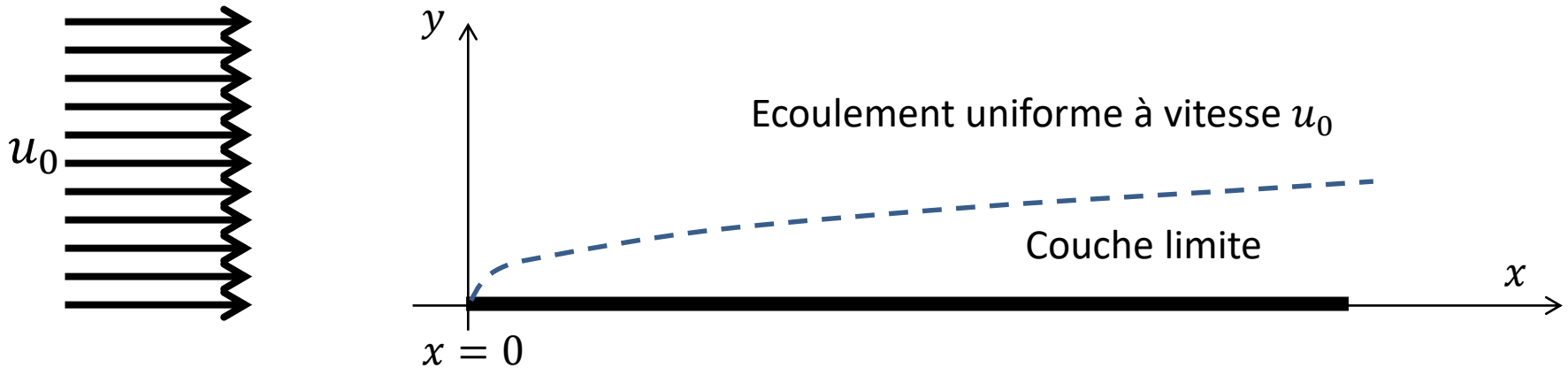
$$Re = \frac{\rho u_0 \delta}{\mu} = O(\sqrt{t})$$

3. Cette propriété se retrouve dans les écoulements de couche limite ...

Couche limite sur plaque plane

Configuration

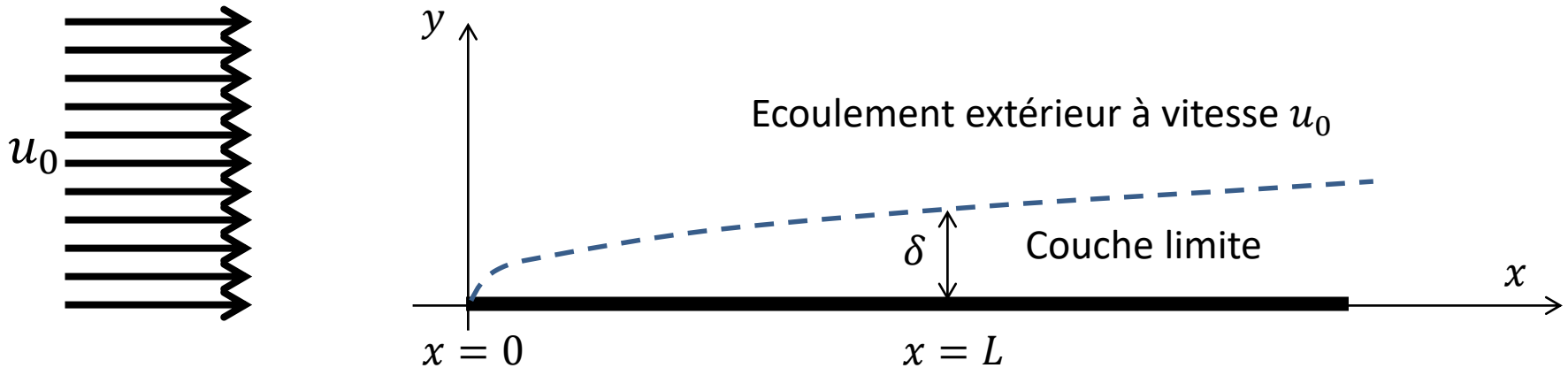
1. On considère un écoulement uniforme d'un fluide visqueux incompressible dans lequel on positionne une plaque semi-infinie alignée avec la direction de l'écoulement.



2. La zone qui raccorde la condition de vitesse nulle sur la plaque à la condition de vitesse uniforme u_0 loin de celle-ci s'appelle couche limite.
3. L'objectif de la suite est de déterminer la structure de l'écoulement dans cette zone

Épaisseur de couche limite

1. Physiquement, la couche limite a une épaisseur δ qui est fixée par la capacité de la diffusion à propager l'information « la vitesse est nulle sur la paroi » en un temps « assez court » (= de l'ordre du temps convectif)



2. L'échelle de temps convectif représentative du trajet entre les positions $x = 0$ et $x = L$ à la vitesse u_0 est L/u_0
3. L'échelle de temps diffusif est δ^2/ν
4. En égalisant les deux échelles de temps, on obtient l'estimation $\frac{\delta}{L} = R_e^{-1/2}$ avec $R_e = \frac{u_0 L}{\nu}$

Epaisseur de couche limite

1. Cette estimation très grossière sera confirmée par le calcul analytique
2. Elle conduit à des épaisseurs de couche limite très petites devant la taille des objets. Par exemple pour le cas d'une voiture sur autoroute:

$$L = 3 \text{ m} \quad u_0 = 36 \text{ m/s (130 km/h)} \quad \nu = 1.43 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$
$$Re \approx 7 \times 10^6 \quad \delta \approx 8 \text{ mm}$$

3. On parle ici de couche limite dynamique. Le même concept existe pour la température. On parle alors de couche limite thermique, dont une estimation grossière de l'épaisseur est simplement

$$\frac{\delta_T}{L} = Pr^{-1/2} Re^{-1/2} \quad \frac{\delta_T}{\delta} = Pr^{-1/2}$$

Modèle de Prandtl

1. A partir des équations de Navier-Stokes 2D dont on ne conserve que les termes prépondérants sous les hypothèses:
 1. Écoulement permanent,
 2. Existence d'une direction privilégiée dans laquelle la diffusion est négligeable devant la convection,
 3. $\frac{u}{L} \sim \frac{v}{\delta}$

on obtient le modèle de couche limite suivant:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Modèle de Prandtl

1. La dernière équation indique que la pression n'évolue pas dans la direction normale à la paroi.
2. La pression au sein de la couche limite est donc correctement approximée par la pression à l'extérieur de celle-ci, où les effets de viscosité sont négligeables et où l'écoulement n'est pas perturbé par la plaque
3. On en déduit une réécriture possible de l'équation de quantité de mouvement du modèle de Prandtl

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_0 \frac{du_0}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

4. Cette formulation est plus cohérente avec l'utilisation qui est faite du modèle de couche limite en pratique:
 1. Résolution des équations d'Euler dans le domaine complet autour de l'obstacle considéré; détermination de la vitesse u_0 « à l'infini »,
 2. Résolution de la couche limite connaissant $u_0(x)$

Hypothèse d'affinité

1. De manière à prendre en compte la condition d'incompressibilité, on introduit la fonction de courant $\psi(x, y)$ telle que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

2. Bien que plus simple que les équations de Navier-Stokes, le modèle de Prandtl ne peut être résolu dans le cas général analytiquement
3. Une méthode conduisant à l'obtention de solutions analytiques pour certains types d'écoulements consiste à chercher la solution sous la forme:

$$\psi(x, \eta) = u_0(x)g(x)f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{y}{g(x)}$$

où $g(x)$ est une fonction à déterminer. On parle alors d'hypothèse d'affinité et de solution auto-similaire

Equation résolvente

1. Après calcul, le modèle de Prandtl se réduit alors à une équation différentielle ordinaire du troisième ordre pour la fonction $f(\eta)$:

$$\nu f'''' + \left(g^2 \frac{du_0}{dx} + u_0 g g' \right) f f'' + \left(g^2 \frac{du_0}{dx} \right) (1 - f'^2) = 0$$

Les conditions limites associées sont:

$$f(0) = 0; f'(0) = 0; f'(\infty) = 1$$

Retour sur la vitesse

1. On vérifie aisément que chercher ψ sous la forme $\psi(x, \eta) = u_0(x)g(x)f(\eta)$ revient à chercher la vitesse sous la forme

$$\frac{u(x, y)}{u_0(x)} = f'(\eta) \quad ; \quad \frac{v(x, y)}{u_0(x)} = u_0 g'(\eta f' - f)$$

avec $\eta = \frac{y}{g(x)}$

3. Résoudre l'équation précédente pour $f(\eta)$ revient donc bien à déterminer le champ de vitesse dans la couche limite
4. On notera par ailleurs la similitude avec la technique utilisée pour la résolution du problème de Stokes (l'échelle de longueur g était alors une fonction du temps alors qu'elle dépend de la position x dans la situation actuelle

Conditions de compatibilité

1. Les coefficients $g^2 \frac{du_0}{dx} + u_0 g g'$ et $g^2 \frac{du_0}{dx}$ étant fonction de la variable x , indépendante de la variable η dont dépend la fonction inconnue f , des solutions à l'équation

$$v f'''' + \left(g^2 \frac{du_0}{dx} + u_0 g g' \right) f f'' + \left(g^2 \frac{du_0}{dx} \right) (1 - f'^2) = 0$$

ne peuvent être déterminées que dans les cas où ces coefficients sont des constantes:

$$g^2 \frac{du_0}{dx} + u_0 g g' = \text{constante}$$

$$g^2 \frac{du_0}{dx} = \text{constante}$$

Solution de Blasius

1. Nous nous concentrons dans la suite sur le cas où la vitesse extérieure u_0 ne dépend pas de la position x : $u_0 = Cte$
2. Les coefficients deviennent alors:

$$g^2 \frac{du_0}{dx} + u_0 g g' \rightarrow u_0 g g' \quad \text{et} \quad g^2 \frac{du_0}{dx} \rightarrow 0$$

3. Des solutions auto-similaires peuvent alors être trouvées dans le cas où $g g'$ est une constante, autrement dit dans le cas où

$$g \sim \sqrt{x}$$

4. Une fois la dépendance en \sqrt{x} déterminée, la forme exacte de la fonction g peut être fixée arbitrairement. Le choix classiquement fait est $g(x) = \sqrt{\nu x / u_0}$, ce qui conduit à $\eta = y \sqrt{u_0 / \nu x}$ et l'équation résolvante suivante:

$$2f''' + ff'' = 0$$

Solution de Blasius

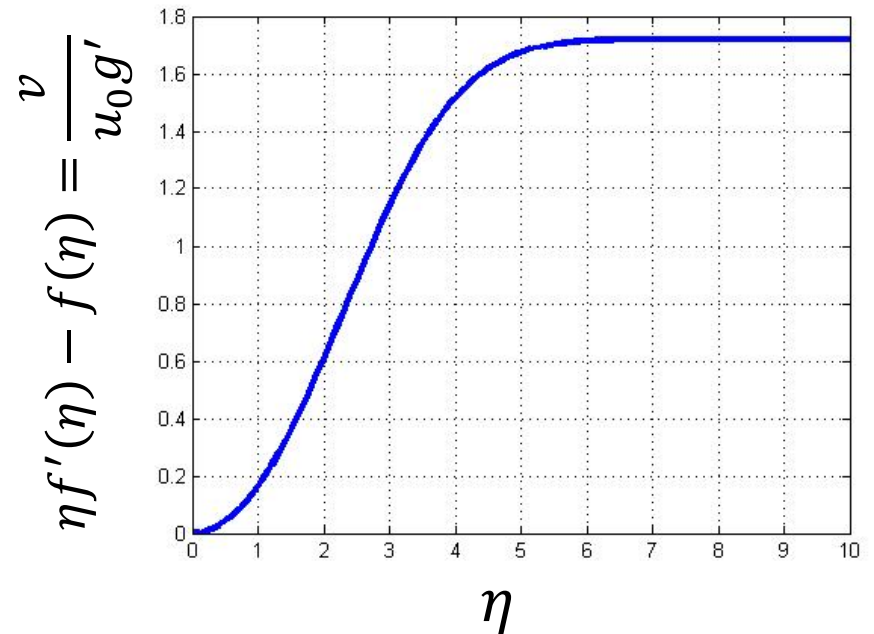
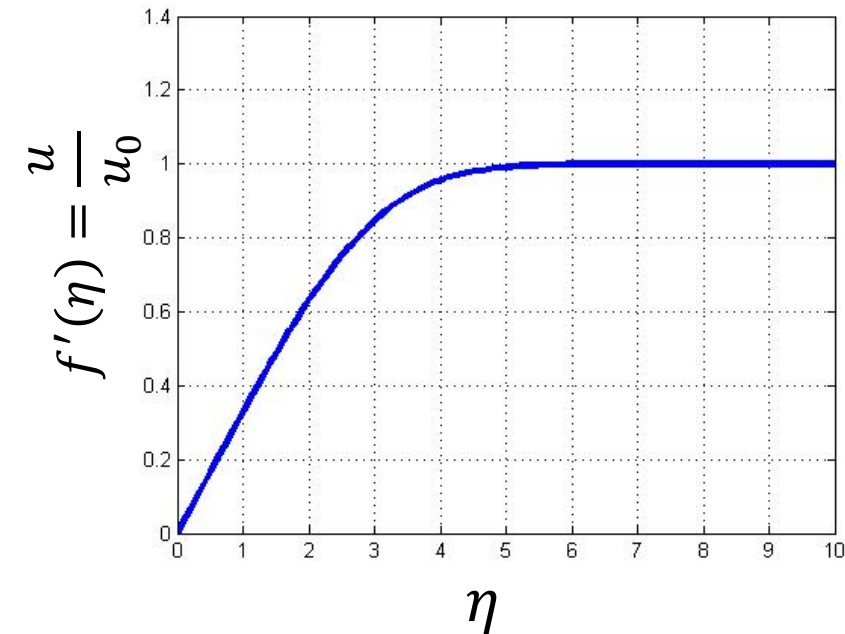
1. Cette équation peut être résolue numériquement sans difficulté; on obtient alors la solution du modèle de Prandtl sous la forme:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_0 f'(\eta)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = u_0 g'(\eta f' - f)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{u_0 x}}$$

Solution de Blasius



L'épaisseur de couche limite $\delta(x)$, définie telle que $u(x, \delta(x)) = 0.99u_0$, correspond donc à $\eta \approx 5$:

$$\delta(x) \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} = 5 \frac{x}{\sqrt{R_x}} \quad \text{avec } R_x = \frac{u_0 x}{\nu}$$

Grandeurs caractéristiques

Nom	Définition	Solution de Blasius
Coefficient de frottement	$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_0^2}$ avec $\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$	$C_f \approx 0.66 \frac{1}{\sqrt{R_x}}$
Epaisseur de couche limite	$\delta(x) \text{ tel que}$ $u(x, \delta(x)) = 0.99u_0$	$\frac{\delta(x)}{x} \approx 4.9 \frac{1}{\sqrt{R_x}}$
Epaisseur de déplacement	$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_0} \right) dy$	$\frac{\delta^*(x)}{x} \approx 1.7 \frac{1}{\sqrt{R_x}}$
Epaisseur de quantité de mouvement	$\theta(x) = \int_0^\infty \frac{u}{u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0} \right) dy$	$\frac{\theta(x)}{x} \approx 0.66 \frac{1}{\sqrt{R_x}}$
Facteur de forme	$H = \frac{\delta^*}{\theta}$	$H \approx 2.6$

Equation de von Karman

1. Les grandeurs caractéristiques précédentes tirent leur importance du fait qu'elles apparaissent dans l'équation de von Karman obtenue en intégrant suivant y l'équation de quantité de mouvement du modèle de Prandtl

2. Cette équation s'écrit:

$$\delta^* u_0 \frac{du_0}{dx} + \frac{du_0^2 \theta}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

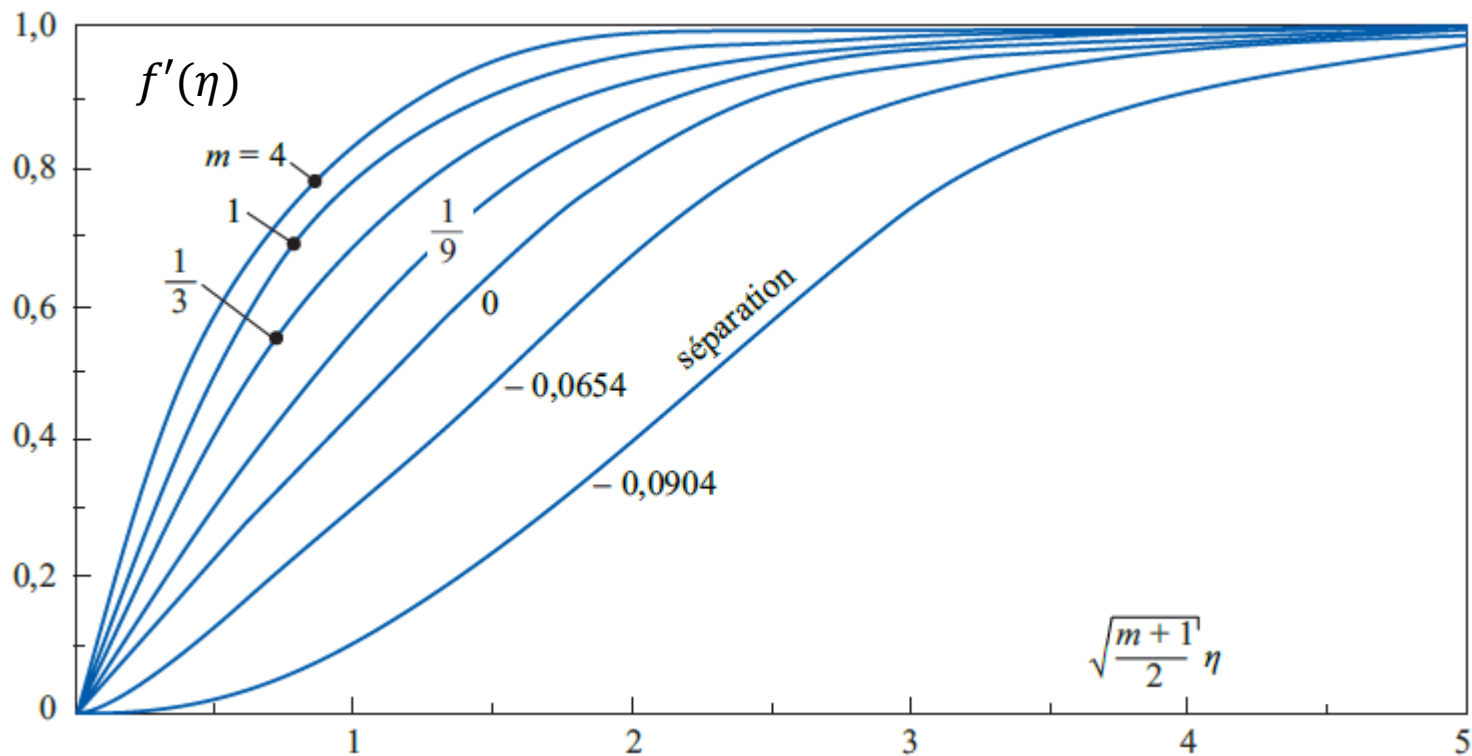
3. Pour le cas particulier de la solution de Blasius, elle justifie l'égalité des coefficients dans les expressions de C_f et θ

4. Elle est aussi à la base des méthodes intégrales de type Karman-Polhausen, méthodes de résolution approximatives et très efficaces des équations de couches limites

Solution dans le cas $u_0(x) = U_0 x^m$

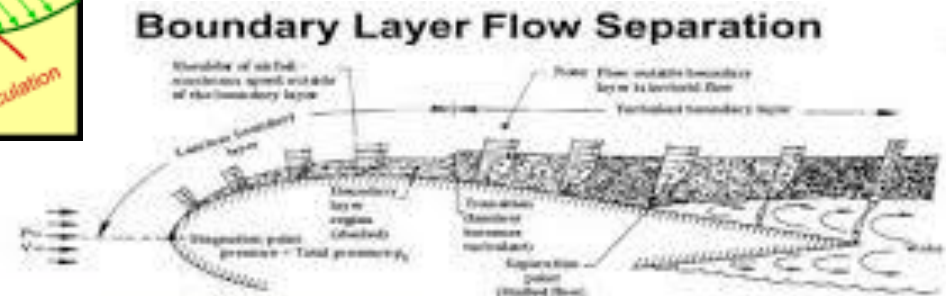
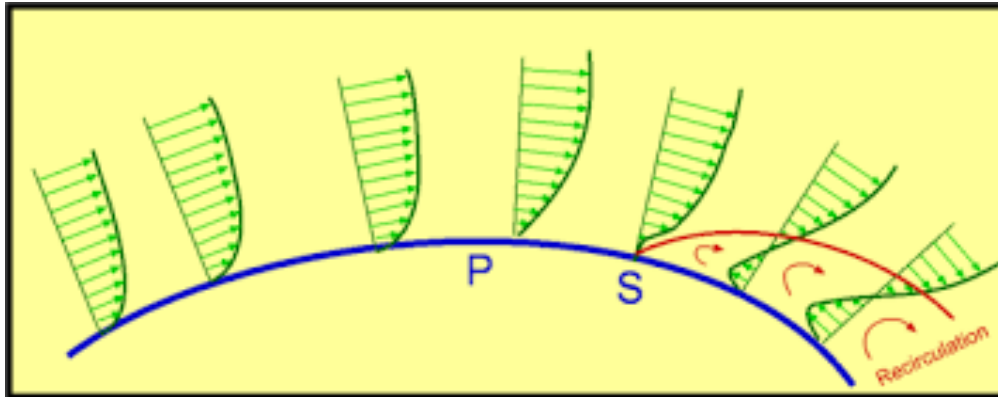
1. Il convient alors de choisir $g(x) = \sqrt{vx/u_0(x)}$
2. L'équation en f devient:

$$2f''' + (m + 1)ff'' + 2m(1 - f'^2) = 0$$



Solution dans le cas $u_0(x) = U_0 x^m$

1. La théorie présentée permet donc de reproduire le phénomène bien connu de décollement des couches limites en situation de gradient de pression défavorable ...



When flow separation occurs, there is also pressure drag.